Tema 7
Problemas

Alfonso V. Ramallo

[1] Sea L_i el operador que representa la componente i del momento angular orbital de una particula. Calculense los conmutadores:

$$[L_i\,,\,X_j]\,,\qquad\qquad [L_i\,,\,P_j]\,,$$

donde X_j y P_j son respectivamente las componentes del operador posicion y momento lineal.

Solucion

A partir de la definicion de las componentes del momento angular orbital:

$$L_i\,=\,\sum_{k,l}\epsilon_{ikl}\,X_k\,P_l\,,$$

obtenemos:

$$[L_i\,,\,X_j]\,=\,\sum_{k,l}\epsilon_{ikl}\,[X_k\,P_l\,,\,X_j]\,=\,\sum_{k,l}\epsilon_{ikl}\,X_k\,[P_l,X_j]\,=$$

$$=-i\hbar\sum_{k,l}\epsilon_{ikl}\,X_k\,\delta_{lj}\,=\,-i\hbar\sum_{k}\epsilon_{ikj}\,X_k\,,$$

donde hemos utilizado el valor del conmutador canonico $[X_j,P_l]=i\hbar\delta_{lj}$. Teniendo en cuenta que $\epsilon_{ikj}=-\epsilon_{ijk}$, podemos escribir:

$$\boxed{[L_i\,,\,X_j]\,=\,i\hbar\sum_{k}\epsilon_{ijk}\,X_k}$$

De forma similar:

$$[L_i,P_j]\,=\,\sum_{k,l}\epsilon_{ikl}\,[X_k\,P_l\,,\,P_j]\,=\,\sum_{k,l}\epsilon_{ikl}\,[X_k,P_j]\,P_l\,=\,i\hbar\sum_{k,l}\epsilon_{ikl}\,P_l\,\delta_{kj}\,=\,i\hbar\sum_{l}\epsilon_{ijl}\,P_l\,,$$

que tras cambiar el indice mudo l por k se convierte en:

$$\boxed{[L_i,P_j]\,=\,i\hbar\sum_{k}\epsilon_{ijk}\,P_k}$$

[2] Sea $D_z(\phi)$ el operador:

$$D_z(\phi) = e^{-i\phi L_z/\hbar}.$$

Demuéstrese que:

$$D_z^\dagger(\phi) \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} D_z(\phi) \;=\; R_z \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Y \end{pmatrix}$$

donde R_z es la matriz:

$$R_z \;=\; \begin{pmatrix} \cos\phi & -\operatorname{sen}\phi & 0 \\ \operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solucion

Puesto que $D_z^\dagger(\phi) \;=\; D_z(-\phi) \;=\; e^{\frac{i}{\hbar}\,\phi\,L_z}$, necesitamos calcular

$$e^L\,A\,e^{-L}\;, \qquad \text{para} \qquad L = \frac{i}{\hbar}\,\phi\,L_z\;, \qquad A \;=\; X\,,\,Y\,,\,Z$$

Para ello, usaremos la formula de Baker-Campbell-Hausdorff:

$$e^L\,A\,e^{-L} \;=\; A + \;[L\,,\,A] + \frac{1}{2!}\,[L,[L,A]] + \;\cdots\;.$$

Consideremos primero $A = Z$. Como $[L_z\,,\,Z] \;=\; 0$, todos lo conmutadores iterados se anulan y solo contribuye el primer termino, de modo que:

$$D_z^\dagger(\phi)\,Z\,D_z(\phi) \;=\; Z\;.$$

En el caso $A = X, Y$, puesto que (vease el ejercicio anterior):

$$[L_z\,,\,X] \;=\; i\hbar\,Y\;, \qquad\qquad [L_z\,,\,Y] \;=\; -i\hbar\,X\;,$$

tenemos:

$$[L_z\,,\,[L_z\,,\,X]\,] \;=\; i\hbar\,[L_z\,,\,Y] \;=\; -(i\hbar)^2\,X\;,$$

$$[L_z\,,\,[L_z\,,\,Y]\,] \;=\; -i\hbar\,[L_z\,,\,X] \;=\; -(i\hbar)^2\,Y\;.$$

En general, tenemos los siguientes conmutadores iterados:

$$[L_z\,,\ \overset{2k}{\cdots}\,,\,[L_z\,,\,X]\cdots]\;=\;(-1)^k(i\hbar)^{2k}\,X\ ,$$

$$[L_z\,,\ \overset{2k+1}{\cdots}\,,\,[L_z\,,\,X]\cdots]\;=\;(-1)^k(i\hbar)^{2k+1}\,Y\ ,$$

$$[L_z\,,\ \overset{2k}{\cdots}\,,\,[L_z\,,\,Y]\cdots]\;=\;(-1)^k(i\hbar)^{2k}\,Y\ ,$$

$$[L_z\,,\ \overset{2k+1}{\cdots}\,,\,[L_z\,,\,Y]\cdots]\;=\;-(-1)^k(i\hbar)^{2k+1}\,X\ .$$

Utilizando estos valores de los conmutadores iterados de L_z con X, obtenemos:

$$D_z^\dagger(\phi)\,X\,D_z(\phi)\;=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left[\frac{i}{\hbar}\,\phi\right]^{2k}(-1)^k\,(i\hbar)^{2k}\,X\;+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left[\frac{i}{\hbar}\,\phi\right]^{2k+1}(-1)^k\,(i\hbar)^{2k+1}\,Y\;=$$

$$=\;X\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,\phi^{2k}\;-\;Y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\phi^{2k+1}\;=\;\cos\phi\,X\;-\;\mathrm{sen}\,\phi\,Y\ .$$

De forma similar, a partir de los conmutadores iterados L_z con Y, obtenemos:

$$D_z^\dagger(\phi)\,Y\,D_z(\phi)\;=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\left[\frac{i}{\hbar}\,\phi\right]^{2k}(-1)^k\,(i\hbar)^{2k}\,Y\;+\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)!}\left[\frac{i}{\hbar}\,\phi\right]^{2k+1}(-1)\,(-1)^k\,(i\hbar)^{2k+1}\,X\;=$$

$$=\;Y\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k)!}\,\phi^{2k}\;+\;X\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\,\phi^{2k+1}\;=\;\cos\phi\,Y\;+\;\mathrm{sen}\,\phi\,X\ .$$

Estos resultados los podemos escribir de forma compacta como:

$$D_z^\dagger(\phi)\begin{pmatrix}X\\Y\\Z\end{pmatrix}D_z(\phi)\;=\;\begin{pmatrix}\cos\phi\,X\;-\;\mathrm{sen}\,\phi\,Y\\ \cos\phi\,Y\;+\;\mathrm{sen}\,\phi\,X\\ Z\end{pmatrix}\;=\;R_z\begin{pmatrix}X\\Y\\Y\end{pmatrix}\ ,$$

que es lo que se pedia demostrar.

[3] Demuéstrese que

$$e^{i\phi J_z/\hbar}\,J_x\,e^{-i\phi J_z/\hbar}=\cos\phi\,J_x-\sin\phi\,J_y.$$

Solucion

Escribamos el primer miembro de la ecuacion a demostrar en la forma de suma sobre conmutadores iterados:

$$e^{i\phi J_z/\hbar}\, J_x\, e^{-i\phi J_z/\hbar} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{i\,\phi}{\hbar}\right)^n [J_z, \overset{n}{\cdots}, [J_z, J_x] \cdots] \;.$$

Pero, las relaciones satisfechas por las componentes del momento angular son:

$$[J_z\,,\, J_x] \;=\; i\hbar\, J_y \;, \qquad\qquad [J_z\,,\, J_y] \;=\; -i\hbar\, J_x \;.$$

Por lo tanto, los conmutadores iterados son:

$$[J_z, \overset{2k}{\cdots}, [J_z, J_x] \cdots] \;=\; (-1)^k\, (i\hbar)^{2k}\, J_x \;,$$

$$[J_z, \overset{2k+1}{\cdots}, [J_z, J_x] \cdots] \;=\; (-1)^k\, (i\hbar)^{2k+1}\, J_y \;,$$

y, en consecuencia:

$$e^{i\phi J_z/\hbar}\, J_x\, e^{-i\phi J_z/\hbar} \;=$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!} \left(\frac{i\,\phi}{\hbar}\right)^{2k} (-1)^k\, (i\hbar)^{2k}\, J_x \;+\; \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)!} \left(\frac{i\,\phi}{\hbar}\right)^{2k+1} (-1)^k\, (i\hbar)^{2k+1}\, J_y \;=$$

$$= J_x \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k)!}\, \phi^{2k} \;-\; J_y \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!}\, \phi^{2k+1} \;=\; \cos\phi\, J_x \;-\; \operatorname{sen}\phi\, J_y \;.$$

[4] Considerese una particula de espin 5/2. Sean S_1, S_2 y S_3 matrices $n \times n$ que representan el momento angular intrinseco de la particula.

a) ¿ Cuál es el valor n que determina la dimension de las matrices S_i?.

b) Supongase que la particula tiene momento angular orbital $l = 1$. ¿Cuales son los posibles valores del momento angular total?.

Solucion

a) La dimension n de las matrices es:

$$n \;=\; 2\,\frac{5}{2}\; + 1 \;=\; 6 \;.$$

b) La ley que da la suma del momento angular para este caso es:

$$1 \otimes \frac{5}{2} = \left(\frac{5}{2} - 1\right) \oplus \frac{5}{2} \oplus \left(\frac{5}{2} + 1\right) .$$

Entonces, los posibles valores del momento angular total son

$$j = \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2} .$$

[5] Se mide la suma de las componentes x y z del espin de una particula de espin 1/2. ¿Que valores se pueden obtener para dicha suma?

Solucion

Escribamos la representacion matricial de $O = S_x + S_z$:

$$O = S_x + S_z = \frac{\hbar}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} .$$

Los posibles valores de la medida son los autovalores de O. Puesto que la ecuacion:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(1+\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2 = 0 ,$$

tiene por soluciones

$$\lambda = \pm\sqrt{2} ,$$

los posibles resultados de la medida de $S_x + S_z$ son:

$$\boxed{\pm \frac{\hbar}{2}\sqrt{2} = \pm \frac{\hbar}{\sqrt{2}}}$$

[6] Una particula de espin 1/2 tiene un momento angular orbital con numero cuantico $l = 1$. ¿Cuales son los posibles valores del numero cuantico j correspondiente a su momento angular total?. Si medimos la tercera componente del momento angular total $\vec{J}$, ¿que valores podemos obtener?.

Solucion

El momento angular total es $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ y la ley de composicion es:

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \oplus \frac{3}{2} \; .$$

Por lo tanto los posibles valores del numero cuantico j son:

$$\boxed{j = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}}$$

Sea $m\hbar$ el valor de la tercera componente del momento angular. Para $j = \frac{1}{2}$ tenemos:

$$j = \frac{1}{2} \implies m = -\frac{1}{2}, +\frac{1}{2} \; ,$$

y para $j = \frac{3}{2}$ m puede tomar los valores:

$$j = \frac{3}{2} \implies m = -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2} \; .$$

Asi pues, los posibles valores de J_3 son:

$$\boxed{J_3 = -\frac{3\hbar}{2}, -\frac{\hbar}{2}, \frac{\hbar}{2}, \frac{3\hbar}{2}}$$

[7] Considérese un electrón ligado en un átomo de hidrógeno bajo la influencia de un campo magnético externo $\vec{B} = B\vec{z}$. Ignorése el espín del electrón. El hamiltoniano del sistema es

$$H = H_0 - \omega L_z,$$

donde $\omega = |e|B/(2m_e c)$ y H_0 es el hamiltoniano no perturbado del átomo de hidrogéno. Los autovalores E_n^0 y los autovectores $|n, l, m\rangle$ del sistema no perturbado se suponen conocidos. Supongamos que en el instante $t = 0$ el sistema está en el estado

$$|\psi(0)\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1, -1\rangle - |2, 1, 1\rangle).$$

(a) Para cada uno de los siguientes estados, calcúlese la probabilidad de encontrar el sistema, en algún tiempo $t > 0$ en los estados:

$$|2p_x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1, -1\rangle - |2, 1, 1\rangle),$$
$$|2p_y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|2, 1, -1\rangle + |2, 1, 1\rangle),$$
$$|2p_z\rangle = |2, 1, 0\rangle.$$

¿Cuándo se vuelve 1 cualquiera de estas probabilidades?

(b) Considérese el estado $|\vec{n}\rangle$ definido por

$$(\vec{n} \cdot \vec{L})|\vec{n}\rangle = \hbar|\vec{n}\rangle, \qquad L^2|\vec{n}\rangle = 2\hbar^2|\vec{n}\rangle,$$

es decir, se trata de un autoestado del momento angular con $l = 1$ en la dirección dada por el vector unitario $\vec{n}$. Calcúlese la probabilidad de encontrar el sistema en este estado y demuéstrese que es una función periódica del tiempo. ¿Cuál es el periodo? Por simplicidad considérese que $\vec{n}$ está en el plano xy.

(c) Calcúlese el valor esperado del momento magnético dipolar asociado con el momento angular en el tiempo t.

Solucion

a) Los estados $|n, l, m\rangle$ son autoestados de H_0 con autovalor E_n^0, que depende solo del numero cuantico principal n. Puesto que los estados $|n, l, m\rangle$ son tambien autovectores del operador L_z:

$$L_z\,|n, l, m\rangle \;=\; m\,\hbar\,|n, l, m\rangle \;,$$

entonces los $|n, l, m\rangle$ tambien diagonalizan el hamiltoniano total H:

$$H\,|n, l, m\rangle \;=\; H_0\,|n, l, m\rangle \;-\; \omega\, L_z|n, l, m\rangle \;=\; (E_n^0 \;-\; m\,\omega\,\hbar)\,|n, l, m\rangle \;.$$

Denotemos

$$E_{n\,,\,m} \equiv E_n^0 - \,m\,\omega\,\hbar \;.$$

Entonces, el estado del sistema para $t \geq 0$ es:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2,-1}\,t}\,|2, 1, -1\rangle \;-\; e^{-\frac{i}{\hbar}E_{2,1}\,t}\,|2, 1, 1\rangle\right) \;.$$

Teniendo en cuenta que $E_{2,-1} \;=\; E_2^{(0)} + \hbar\,\omega$ y $E_{2,1} \;=\; E_2^{(0)} - \hbar\,\omega$, podemos escribir $|\psi(t)\rangle$ en la forma:

$$|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^{(0)}\,t}}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\omega\,t}\,|2, 1, -1\rangle \;-\; e^{i\omega\,t}\,|2, 1, 1\rangle\right) \;.$$

Entonces, la probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|2p_x\rangle$ para $t \geq 0$ es:

$$P(2p_x) \;=\; \left|\langle 2p_x|\psi(t)\rangle\right|^2 \;=\; \frac{1}{4}\left|\Big(\langle 2, 1, -1| - \langle 2, 1, 1|\Big)\Big(e^{-i\omega\,t}|2, 1, -1\rangle \;-\; e^{i\omega\,t}|2, 1, 1\rangle\Big)\right|^2 \;=$$

$$=\; \frac{1}{4}\left|e^{-i\omega\,t} \;+\; e^{i\omega\,t}\right|^2 \;=\; \frac{1}{4}\left|2\cos\omega t\right|^2 \;,$$

que simplificado da:

$$\boxed{P(2p_x) \;=\; \cos^2\omega t}$$

De forma similar, la probabilidad de que en el instante t el atomo se ecuentre en estado $|2p_y\rangle$ es:

$$P(2p_y) \;=\; \left|\langle 2p_y|\psi(t)\rangle\right|^2 \;=\; \frac{1}{4}\left|\Big(\langle 2, 1, -1| + \langle 2, 1, 1|\Big)\Big(e^{-i\omega\,t}|2, 1, -1\rangle \;-\; e^{i\omega\,t}|2, 1, 1\rangle\Big)\right|^2 \;=$$

$$=\; \frac{1}{4}\left|e^{-i\omega\,t} \;-\; e^{i\omega\,t}\right|^2 \;=\; \frac{1}{4}\left|2i\mathrm{sen}\,\omega t\right|^2 \;,$$

es decir

$$\boxed{P(2p_y) \;=\; \mathrm{sen}^{\,2}\omega t}$$

Ademas, claramente la probabilidad de encontrar el atomo en el estado $|2p_z\rangle$ es nula pues los estados $|2, 1, -1\rangle$ y $|2, 1, 1\rangle$ son ortogonales al estado $|2, 1, 0\rangle$:

$$\boxed{P(2p_z) \;=\; 0}$$

Las probabilidades $P(2p_x)$ y $P(2p_y)$ son iguales a uno si $\cos\omega t = \pm 1$ y $\mathrm{sen}\,\omega t = \pm 1$ respectivamente. Por lo tanto:

$$t = \frac{n\pi}{\omega} \;\Longrightarrow\; P(2p_x) = 1 \qquad\qquad t = \frac{n\pi}{2\omega} \;\Longrightarrow\; P(2p_y) = 1 \;,$$

para $n = 0, 1, \cdots$.

(b) Sea $\vec{n}$ el vector;

$$\vec{n} \;=\; \cos\phi\,\vec{i} \,+\, \mathrm{sen}\,\phi\,\vec{j}\ .$$

Entonces:

$$\vec{L}\cdot\vec{n} \;=\; \cos\phi\,L_x \,+\, \mathrm{sen}\,\phi\,L_y\ .$$

Escribamos $|\vec{n}\rangle$ en la base $\{|2,1,m\rangle, m = -1,0,1\}$:

$$|\vec{n}\rangle \;=\; c_{-1}\,|2,1,-1\rangle \,+\, c_0\,|2,1,0\rangle \,+ c_1|2,1,1\rangle\ ,$$

siendo c_0 y $c_{\pm 1}$ constantes a determinar. Este vector $|\vec{n}\rangle$ debe de ser autovector de $\vec{L}\cdot\vec{n}$ con autovalor $\hbar$. Para encontrar los coeficientes c_0 y $c_{\pm 1}$ que hacen que se satisfaga esta condicion, escribamos $\vec{L}\cdot\vec{n}$ en terminos de los operadores escalera $L_\pm = L_x \pm iL_y$. Puesto que:

$$L_x \;=\; \frac{1}{2}\big(L_+ \,+\, L_-\big)\ , \qquad\qquad L_y \;=\; \frac{1}{2i}\big(L_+ \,-\, L_-\big)\ ,$$

se tiene:

$$\vec{L}\cdot\vec{n} \;=\; \frac{\cos\phi}{2}\big(L_+ \,+\, L_-\big) \,+\, \frac{\mathrm{sen}\,\phi}{2i}\big(L_+ \,-\, L_-\big) \;=\; \frac{e^{-i\phi}}{2}\,L_+ \,+\, \frac{e^{i\phi}}{2}\,L_-\ .$$

Para obtener la accion de $\vec{L}\cdot\vec{n}$ sobre los diferentes estados recordemos que:

$$L_\pm\,|n,j,m\rangle \;=\; \hbar\,\sqrt{j(j+1) \,-\, m(m\pm 1)}\,|n,j,m\pm 1\rangle$$

Entonces:

$$L_+|2,1,-1\rangle = \hbar\sqrt{2}|2,1,0\rangle \qquad L_+|2,1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|2,1,1\rangle\,, \qquad L_+|2,1,1\rangle = 0\ ,$$

$$L_-|2,1,-1\rangle = 0\,, \qquad L_-|2,1,0\rangle = \hbar\sqrt{2}|2,1,-1\rangle\,, \qquad L_-|2,1,1\rangle = \hbar\sqrt{2}|2,1,0\rangle\,.$$

Por lo tanto:

$$L_+\,|\vec{n}\rangle \;=\; \hbar\sqrt{2}\,c_0\,|2,1,1\rangle \,+\, \hbar\sqrt{2}\,c_{-1}\,|2,1,0\rangle\ ,$$

$$L_-\,|\vec{n}\rangle \;=\; \hbar\sqrt{2}\,c_1\,|2,1,0\rangle \,+\, \hbar\sqrt{2}\,c_0\,|2,1,-1\rangle\ ,$$

y, en consecuencia:

$$\vec{L}\cdot\vec{n}\,|\vec{n}\rangle \;=\; \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,e^{-i\phi}\Big[c_0\,|2,1,1\rangle \,+\, c_{-1}\,|2,1,0\rangle\Big] \,+\, \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,e^{i\phi}\Big[c_1\,|2,1,0\rangle \,+\, c_0\,|2,1,-1\rangle\Big] \;=$$

$$= \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,e^{i\phi}\,c_0\,|2,1,-1\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,\big(e^{-i\phi}c_{-1} + e^{i\phi}\,c_1\big)|2,1,0\rangle + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\,e^{-i\phi}\,c_0\,|2,1,1\rangle\ .$$

Deberia de verificarse que;

$$\vec{L}\cdot\vec{n}\,|\vec{n}\rangle \;=\; \hbar\big[c_{-1}\,|2,1,-1\rangle \;+\; c_0\,|2,1,0\rangle \;+c_1|2,1,1\rangle\big]\ .$$

Esto sucedera si:

$$c_{-1} = \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}c_0\,, \qquad c_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(e^{-i\phi}\,c_{-1} + e^{i\phi}\,c_1\right), \qquad c_1 = \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}c_0\ .$$

La segunda de estas ecuaciones es consecuencia de las otras dos. Utilizandolas podemos expresar $|\vec{n}\rangle$ en terminos de c_0:

$$|\vec{n}\rangle \;=\; c_0\Big[\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|2,1,-1\rangle \;+\; |2,1,0\rangle \;+\; \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}|2,1,1\rangle\Big]\ .$$

Imponiendo la condicion de normalizacion $\langle\vec{n}|\vec{n}\rangle = 1$ obtenemos que $|c_0|^2 = 1/2$, que nos permite escoger $c_0 = 1/\sqrt{2}$. Entonces:

$$|\vec{n}\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\Big[\frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}|2,1,-1\rangle \;+\; |2,1,0\rangle \;+\; \frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}|2,1,1\rangle\Big]\ .$$

La probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|\vec{n}\rangle$ para $t \geq 0$ es:

$$P(|\vec{n}\rangle) \;=\; \frac{1}{4}\,\Big|\Big(\frac{e^{-i\phi}}{\sqrt{2}}\langle 2,1,-1| + \langle 2,1,0| + \frac{e^{i\phi}}{\sqrt{2}}\langle 2,1,1|\Big)\Big(e^{-i\omega\,t}|2,1,-1\rangle \;-\; e^{i\omega\,t}|2,1,1\rangle\Big)\Big|^2 \;=$$

$$= \frac{1}{4}\left|\frac{e^{i(\omega\,t+\phi)}}{\sqrt{2}} \;-\; \frac{e^{-i(\omega\,t+\phi)}}{\sqrt{2}}\right|^2 \;=\; \frac{1}{8}\,\Big|2\,i\,\mathrm{sen}\,(\omega\,t+\phi)\Big|^2\ .$$

Simplificando esta expresion, obtenemos:

$$\boxed{P(|\vec{n}\rangle) \;=\; \frac{1}{2}\,\mathrm{sen}^{\,2}(\omega\,t+\phi)}$$

Esta probabilidad es periodica con periodo $2\pi/\omega$ y tiene un valor maximo de $1/2$.

(c) El momento magnetico $\vec{\mu}$ asociado al momento angular $\vec{L}$ es:

$$\vec{\mu} \;=\; \frac{e}{2\,m\,c}\,\vec{L}\ .$$

Para calcular $\langle\vec{\mu}\rangle$ obtengamos $\langle\vec{L}\rangle$. En primer lugar consideremos la componente z, Dado que:

$$L_z\,|\psi(t)\rangle \;=\; \frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^{(0)}\,t}}{\sqrt{2}}\,\Big(e^{-i\omega\,t}\,L_z\,|2,1,-1\rangle \;-\; e^{i\omega\,t}\,L_z\,|2,1,1\rangle\Big) \;=$$

$$= -\,\hbar\frac{e^{-\frac{i}{\hbar}E_2^{(0)}\,t}}{\sqrt{2}}\,\Big(e^{-i\omega\,t}\,|2,1,-1\rangle \;+\; e^{i\omega\,t}\,|2,1,1\rangle\Big)\ .$$

Entonces:

$$\langle L_z \rangle \;=\; \langle \psi(t) | L_z \, | \psi(t) \rangle \;=$$

$$= \frac{\hbar}{2} \left(e^{i\omega\, t} \, \langle 2,1,-1| \,+\, e^{-i\omega\, t} \, \langle 2,1,1| \right) \left(e^{-i\omega\, t} \, |2,1,-1\rangle \,+\, e^{i\omega\, t} \, |2,1,1\rangle \right) \;=\; \frac{\hbar}{2} \, (1-1) \;.$$

Es decir:

$$\langle L_z \rangle \;=\; 0 \;.$$

Obtengamos ahora como actuan L_+ y L_- sobre $|\psi(t)\rangle$:

$$L_\pm \, |\psi(t)\rangle \;=\; \frac{e^{-\frac{i}{\hbar} E_2^{(0)}\, t}}{\sqrt{2}} \left(e^{-i\omega\, t} \, L_\pm \, |2,1,-1\rangle \,-\, e^{i\omega\, t} \, L_\pm \, |2,1,1\rangle \right) \;=$$

$$= \; \pm \hbar \, e^{-\frac{i}{\hbar} E_2^{(0)}\, t} \, e^{\mp i\omega\, t} \, |2,1,0\rangle \;.$$

Vemos pues que L_+ y L_- actuado sobre $|\psi(t)\rangle$ dan estados proporcionales a $|2,1,0\rangle$ que son ortogonales a $|\psi(t)\rangle$ y, en consecuencia, $\langle L_\pm \rangle = 0$. Ello implica que el valor esperado de las componentes x e y de $\vec{L}$ son nulas:

$$\langle L_x \rangle \;=\; \langle L_y \rangle \;=\; 0 \;.$$

Por lo tanto $\langle \vec{L} \rangle = 0$ y, en definitiva, el valor esperado del momento magnetico en este estado se anula:

$$\boxed{\langle \, \vec{\mu} \, \rangle \;=\; 0}$$

[8] Considérese el estado $|j_1, j_2, j, m\rangle$ que es un autoestado común de los operadores $\vec{J}_1^2$, $\vec{J}_2^2$, $\vec{J}^2$ y J_z, donde $\vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2$. Muéstrese que este estado es también un autoestado del producto escalar $\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2$ y encuéntrese su autovalor. Hágase lo mismo para $\vec{J} \cdot \vec{J}_1$ y para $\vec{J} \cdot \vec{J}_2$.

Solucion

Dado que $\vec{J} \,=\, \vec{J}_1 \,+\, \vec{J}_2$, se tiene:

$$\vec{J}^{\,2} \;=\; \vec{J}_1^{\,2} \,+\, \vec{J}_2^{\,2} \,+\, 2\, \vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 \;,$$

y entonces:

$$\vec{J}_1 \cdot \vec{J}_2 \;=\; \frac{1}{2} \left(\vec{J}^{\,2} \,-\, \vec{J}_1^{\,2} \,-\, \vec{J}_2^{\,2} \right) \;.$$

Puesto que:

$$\vec{J}^{\,2}\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;=\; \hbar^2\,j(j+1)\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;,$$

$$\vec{J}_1^{\,2}\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;=\; \hbar^2\,j_1(j_1+1)\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;,$$

$$\vec{J}_2^{\,2}\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;=\; \hbar^2\,j_2(j_2+1)\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;,$$

se tiene:

$$\boxed{\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;=\; \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1)\;-\;j_1(j_1+1)\;-\;j_2(j_2+1)\right]\,|j_1,j_2,j,m\rangle}$$

lo que prueba que $|j_1,j_2,j,m\rangle$ es autoestado de $\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2$ y nos da su autovalor. Por otra parte podemos escribir $\vec{J}\cdot\vec{J}_1$ en la forma:

$$\vec{J}\cdot\vec{J}_1 \;=\; (\vec{J}_1+\vec{J}_2)\cdot J_1 \;=\; \vec{J}_1^{\,2}\;+\;\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2\;.$$

Usando ahora la expresion obtenida mas arriba para $\vec{J}_1\cdot\vec{J}_2$, obetenemos:

$$\vec{J}\cdot\vec{J}_1 \;=\; \vec{J}_1^{\,2}\;+\;\frac{1}{2}\left(\vec{J}^{\,2}\;-\;\vec{J}_1^{\,2}\;-\;\vec{J}_2^{\,2}\right) \;=\; \frac{1}{2}\left(\vec{J}^{\,2}\;+\;\vec{J}_1^{\,2}\;-\;\vec{J}_2^{\,2}\right)\;.$$

De forma similar, se puede deducir que:

$$\vec{J}\cdot\vec{J}_2 \;=\; \frac{1}{2}\left(\vec{J}^{\,2}\;+\;\vec{J}_2^{\,2}\;-\;\vec{J}_1^{\,2}\right)\;.$$

Es ahora inmediato obtener como actuan $\vec{J}\cdot\vec{J}_1$ y $\vec{J}\cdot\vec{J}_2$ sobre los vectores $\vec{J}_2\,|j_1,j_2,j,m\rangle$:

$$\boxed{\vec{J}\cdot\vec{J}_1\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;=\; \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1)\;+\;j_1(j_1+1)\;-\;j_2(j_1+2)\right]\,|j_1,j_2,j,m\rangle}$$

$$\boxed{\vec{J}\cdot\vec{J}_2\,|j_1,j_2,j,m\rangle \;=\; \frac{\hbar^2}{2}\left[j(j+1)\;-\;j_1(j_1+1)\;+\;j_2(j_1+2)\right]\,|j_1,j_2,j,m\rangle}$$

[9] Considérese un par de espínes con interacción dipolar magnética

$$H_m = -\gamma\mu_1\mu_2\vec{S}^{(1)}\cdot\vec{S}^{(2)}.$$

Un campo magnético externo $\vec{B}$ introduce una interacción adicional

$$H_B = -\vec{B}(\mu_1\vec{S}^{(1)} - \mu_2\vec{S}^{(2)}).$$

(a) Determínese los niveles de energía y sus autoestados (en función de la base $(\{|++\rangle, |+-\rangle, |-+\rangle, |--\rangle\})$.
(b) Si el sistema está inicialmente en el estado $|+-\rangle$ calcúlese la probabilidad de encontrarlo posteriormente en el estado $|-+\rangle$ ¿Cuál es el valor máximo de esta probabilidad y cuando se alcanza?
(c) Encuéntrese el valor esperado de los espínes individuales y del espín total como función del tiempo.

Solucion

Eligiendo el eje $\hat{z}$ en la dirección del campo magnético, $\mathbf{B}\cdot(\mu_1\mathbf{S}^{(1)} - \mu_2\mathbf{S}^{(2)}) = B(\mu_1\mathbf{S}_z^{(1)} - \mu_2\mathbf{S}_z^{(2)})$, y el Hamiltoniano del sistema es

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= -\gamma\mu_1\mu_2\,\mathbf{S^{(1)}}\cdot\mathbf{S^{(2)}} - \mathbf{B}\cdot(\mu_1\mathbf{S^{(1)}} - \mu_2\mathbf{S^{(2)}}) \\
&= -\gamma\mu_1\mu_2\left(\frac{\mathbf{S}_+^{(1)}\mathbf{S}_-^{(2)} + \mathbf{S}_-^{(1)}\mathbf{S}_+^{(2)}}{2} + \mathbf{S}_z^{(1)}\mathbf{S}_z^{(2)}\right) - B(\mu_1\mathbf{S}_z^{(1)} - \mu_2\mathbf{S}_z^{(2)})\ ,
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{S}_\pm^{(i)} = \mathbf{S}_x^{(i)} \pm i\mathbf{S}_y^{(i)}$, son operadores que, sobre cada espín, resultan $\mathbf{S}_\pm|\pm\rangle = 0$ y $\mathbf{S}_\pm|\mp\rangle = \hbar|\pm\rangle$.

a) Actuando con $\mathcal{H}$ sobre cada elemento de la base:

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}|+,+\rangle &= \left(-\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4} - \frac{B\mu_1\hbar}{2} + \frac{B\mu_2\hbar}{2}\right)|+,+\rangle\ , \\
\mathcal{H}|+,-\rangle &= -\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{2}|-,+\rangle + \left(\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4} - \frac{B\mu_1\hbar}{2} - \frac{B\mu_2\hbar}{2}\right)|+,-\rangle\ , \\
\mathcal{H}|-,+\rangle &= -\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{2}|+,-\rangle + \left(\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4} + \frac{B\mu_1\hbar}{2} + \frac{B\mu_2\hbar}{2}\right)|-,+\rangle\ , \\
\mathcal{H}|-,-\rangle &= \left(-\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4} + \frac{B\mu_1\hbar}{2} - \frac{B\mu_2\hbar}{2}\right)|-,-\rangle\ ,
\end{aligned}$$

de modo que reconocemos inmediatamente dos autoestados y sus niveles de energía:

$$|\Psi_1\rangle := |+,+\rangle \ , \qquad E_1 = -\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4}\left[1+\frac{2B(\mu_1-\mu_2)}{\gamma\mu_1\mu_2\hbar}\right] \ ,$$

$$|\Psi_2\rangle := |-,-\rangle \ , \qquad E_2 = -\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4}\left[1-\frac{2B(\mu_1-\mu_2)}{\gamma\mu_1\mu_2\hbar}\right] \ .$$

Resta encontrar las dos combinaciones lineales de los estados $|+,-\rangle$ y $|-,+\rangle$ que son autoestados de $\mathcal{H}$. Debemos diagonalizar la matriz $\langle\xi,-\xi|\mathcal{H}|\xi',-\xi'\rangle$ (donde $\xi,\xi'=\pm$),

$$\langle\xi,-\xi|\mathcal{H}|\xi',-\xi'\rangle = \frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4}\begin{pmatrix} 1-\frac{2B(\mu_1+\mu_2)}{\gamma\mu_1\mu_2\hbar} & -2 \\ -2 & 1+\frac{2B(\mu_1+\mu_2)}{\gamma\mu_1\mu_2\hbar}\end{pmatrix} \ .$$

La ecuación de autovalores, $\det(\langle\xi,-\xi|(\mathcal{H}-E\mathbb{1})|\xi',-\xi'\rangle)=0$, resulta

$$\left[1-\frac{2B(\mu_1+\mu_2)}{\gamma\mu_1\mu_2\hbar}-\tilde{E}\right]\left[1+\frac{2B(\mu_1+\mu_2)}{\gamma\mu_1\mu_2\hbar}-\tilde{E}\right]-4=0 \ ,$$

donde $E=\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4}\tilde{E}$. Es decir,

$$\tilde{E}^2-2\tilde{E}-3-\frac{4B^2(\mu_1+\mu_2)^2}{\gamma^2\mu_1^2\mu_2^2\hbar^2}=0 \ ,$$

por lo que el espectro se completa con las dos raíces de esta ecuación,

$$E_3 = \frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4}\left[1+2\sqrt{1+\frac{B^2(\mu_1+\mu_2)^2}{\gamma^2\mu_1^2\mu_2^2\hbar^2}}\right] \ ,$$

$$E_4 = \frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{4}\left[1-2\sqrt{1+\frac{B^2(\mu_1+\mu_2)^2}{\gamma^2\mu_1^2\mu_2^2\hbar^2}}\right] \ .$$

Dado que los correspondientes autoestados normalizados, $|\Psi_3\rangle$ y $|\Psi_4\rangle$, son ortogonales y pertenecen al subespacio generado por $|+,-\rangle$ y $|-,+\rangle$, siempre pueden escribirse como

$$|\Psi_3\rangle := \cos\Omega|+,-\rangle+\operatorname{sen}\Omega|-,+\rangle \ , \qquad |\Psi_4\rangle := \operatorname{sen}\Omega|+,-\rangle-\cos\Omega|-,+\rangle \ ,$$

relación que puede ser invertida fácilmente,

$$|+,-\rangle = \cos\Omega|\Psi_3\rangle+\operatorname{sen}\Omega|\Psi_4\rangle \ , \qquad |-,+\rangle = \operatorname{sen}\Omega|\Psi_3\rangle-\cos\Omega|\Psi_4\rangle \ .$$

Teniendo en cuenta que $\mathcal{H}|\Psi_3\rangle = E_3|\Psi_3\rangle$ (lo mismo da si partimos de $\mathcal{H}|\Psi_4\rangle = E_4|\Psi_4\rangle$), tras un cálculo algebraico podemos determinar Ω,

$$\cot 2\Omega = \frac{B(\mu_1+\mu_2)}{\gamma\mu_1\mu_2\hbar} \ .$$

b) La evolución del estado del sistema, $|\Psi(0)\rangle = |+,-\rangle$ está dictada por el Hamiltoniano

$$\begin{aligned}
|\Psi(t)\rangle &= e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|\Psi(0)\rangle = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}|+,-\rangle = e^{-i\mathcal{H}t/\hbar}(\cos\Omega|\Psi_3\rangle + \operatorname{sen}\Omega|\Psi_4\rangle) \\
&= e^{-iE_3t/\hbar}\cos\Omega|\Psi_3\rangle + e^{-iE_4t/\hbar}\operatorname{sen}\Omega|\Psi_4\rangle \\
&= \left[e^{-iE_3t/\hbar}\cos^2\Omega + e^{-iE_4t/\hbar}\operatorname{sen}^2\Omega\right]|+,-\rangle + \operatorname{sen}\Omega\cos\Omega\left[e^{-iE_3t/\hbar} - e^{-iE_4t/\hbar}\right]|-,+\rangle \ .
\end{aligned}$$

La probabilidad de encontrar el sistema en el estado $|-,+\rangle$ en el instante t es

$$\mathcal{P}(t) := |\langle -,+|\Psi(t)\rangle|^2 = |\operatorname{sen}\Omega\cos\Omega[e^{-iE_3t/\hbar} - e^{-iE_4t/\hbar}]|^2 \ ,$$

expresión que podemos simplificar utilizando

$$\begin{aligned}
e^{-iE_3t/\hbar} - e^{-iE_4t/\hbar} &= e^{-iE_3t/2\hbar}e^{-iE_4t/2\hbar}[e^{-i(E_3-E_4)t/2\hbar} - e^{i(E_3-E_4)t/2\hbar}] \\
&= \frac{i}{2}e^{-iE_3t/2\hbar}e^{-iE_4t/2\hbar}\operatorname{sen}\left[\frac{(E_3-E_4)t}{2\hbar}\right] \ .
\end{aligned}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que

$$E_3 - E_4 = \gamma\mu_1\mu_2\hbar^2\sqrt{1 + \frac{B^2(\mu_1+\mu_2)^2}{\gamma^2\mu_1^2\mu_2^2\hbar^2}} = \frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar^2}{\operatorname{sen}2\Omega} \ ,$$

resulta:

$$\mathcal{P}(t) = \operatorname{sen}2\Omega\operatorname{sen}^2\left[\frac{\gamma\mu_1\mu_2\hbar t}{2\operatorname{sen}2\Omega}\right] \ .$$

El valor máximo de la probabilidad es $\mathcal{P}_{\max} = \operatorname{sen}2\Omega$ y se alcanza en la sucesión de instantes

$$t_n = \frac{(2n+1)\pi}{\gamma\mu_1\mu_2\hbar}\operatorname{sen}2\Omega \ , \quad n \in \mathbb{N} \ .$$

c) Para calcular los valores de expectación de los espines individuales en $|\Psi(t)\rangle$, veamos que

$$\mathbf{S}_+^{(1)}|\Psi(t)\rangle = \hbar\operatorname{sen}\Omega\cos\Omega\left[e^{-iE_3t/\hbar} - e^{-iE_4t/\hbar}\right]|+,+\rangle \ ,$$

que es ortogonal a $\langle\Psi(t)|$. Análogamente,

$$\langle\Psi(t)|\mathbf{S}_\pm^{(i)}|\Psi(t)\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\Psi(t)|\mathbf{S}_x^{(i)}|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\mathbf{S}_y^{(i)}|\Psi(t)\rangle = 0 \ ,$$

por lo que los valores de expectación de las mismas componentes del espín total se anulan:

$$\langle\Psi(t)|\mathbf{S}_x|\Psi(t)\rangle = \langle\Psi(t)|\mathbf{S}_y|\Psi(t)\rangle = 0 \ .$$

La componente z del espín total también tiene valor de expectación nulo porque $|\Psi(t)\rangle$ es una combinación lineal de $|+,-\rangle$ y $|-,+\rangle$ (o, lo que es lo mismo, de $|1,0\rangle$ y $|0,0\rangle$ en la base definida por los números cuánticos de $\mathbf{S}^2$ y $\mathbf{S}_z$,

$$\langle\Psi(t)|\mathbf{S}_z|\Psi(t)\rangle = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\Psi(t)|\mathbf{S}_z^{(2)}|\Psi(t)\rangle = -\langle\Psi(t)|\mathbf{S}_z^{(1)}|\Psi(t)\rangle \ .$$

Sólo resta por calcular $\langle\Psi(t)|\mathbf{S}_z^{(1)}|\Psi(t)\rangle$. Si escribimos $|\Psi(t)\rangle = a(t)|+,-\rangle + b(t)|-,+\rangle$, de modo que $\langle\Psi(t)| = a^\star(t)\langle+,-| + b^\star(t)\langle-,+|$ y

$$\begin{aligned}
\langle\Psi(t)|\mathbf{S}_z^{(1)}|\Psi(t)\rangle &= [a^\star(t)\langle+,-| + b^\star(t)\langle-,+|]\,\mathbf{S}_z^{(1)}\,[a(t)|+,-\rangle + b(t)|-,+\rangle] \\
&= \frac{\hbar}{2}[a^\star(t)\langle+,-| + b^\star(t)\langle-,+|]\,[a(t)|+,-\rangle - b(t)|-,+\rangle] \\
&= \frac{\hbar}{2}\left[|a(t)|^2 - |b(t)|^2\right] = \frac{\hbar}{2}\left[1 - 2|b(t)|^2\right] = \frac{\hbar}{2}\left[1 - 2\mathcal{P}(t)\right] \ ,
\end{aligned}$$

ya que $|a(t)|^2 + |b(t)|^2 = 1$.

[10] Calcúlese de manera directa los coeficientes de Clebsch-Gordan para el acoplamiento de momentos angulares 1/2 y 1.

Solucion

Tenemos que acoplar un momento angular $j_1 = 1$ y $j_2 = \frac{1}{2}$. Sabemos que la composicion de estos dos momentos angulares da:

$$1 \otimes \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2} \ .$$

Asi pues el momento angular total puede ser $j = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}$. Los valores posibles de la tercera componente del momento angular total son:

$$\boxed{j = \frac{3}{2} \implies m = -\frac{3}{2}\,, -\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}\,, \frac{3}{2}} \qquad \boxed{j = \frac{1}{2} \implies m = -\frac{1}{2}\,, \frac{1}{2}}$$

Los estados en la base desacoplada son:

$$j_1 = 1 \implies |1,1\rangle\,, |1,0\rangle\,, |1,-1\rangle \ ,$$

$$j_2 = \frac{1}{2} \implies |1/2,1/2\rangle\,, |1/2,-1/2\rangle$$

El estado en la base acoplada con maximo valor de m es $|3/2,3/2\rangle_c$ y solo hay una forma de obtenerlo a partir de los estados $|j_1,m_1\rangle$ y $|j_2,m_2\rangle$:

$$\boxed{|3/2,3/2\rangle_c \;=\; |1,1\rangle\,|1/2,1/2\rangle}$$

Apliquemos a este estado el operador $J_- = J_{1,-} + J_{2,-}$. Recordemos que:

$$J_-\,|j,m\rangle_c \;=\; C(j,m)\,|j,m-1\rangle_c\;, \qquad C(j,m) \;=\; \hbar\,\sqrt{j(j+1)-m(m-1)}\;.$$

De forma similar actuan $J_{1,-}$ y $J_{2,-}$. Entonces:

$$J_-\,|3/2,3/2\rangle_c \;=\; C(3/2,3/2)\,|3/2,1/2\rangle_c \;=$$

$$=\Big(J_{1,-}\,|1,1\rangle\Big)|1/2,1/2\rangle \;+\; |1,1\rangle\,\Big(J_{2,-}\,|1/2,1/2\rangle\Big) \;=$$

$$=\;C(1,1)\,|1,0\rangle\,|1/2,1/2\rangle \;+\; C(1/2,1/2)\,|1,1\rangle\,|1/2,-1/2\rangle\;,$$

y, por lo tanto:

$$|3/2,1/2\rangle_c \;=\; \frac{C(1,1)}{C(3/2,3/2)}\,|1,0\rangle\,|1/2,1/2\rangle \;+\; \frac{C(1/2,1/2)}{C(3/2,3/2)}\,|1,1\rangle\,|1/2,-1/2\rangle\;.$$

Teniendo ahora en cuenta que:

$$C(1,1) \;=\; \sqrt{2}\,\hbar\;, \qquad C(1/2,1/2) \;=\; \hbar\;, \qquad C(3/2,3/2) \;=\; \sqrt{3}\,\hbar\;,$$

obtenemos:

$$\boxed{|3/2,1/2\rangle_c \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\,|1/2,1/2\rangle \;+\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,1\rangle\,|1/2,-1/2\rangle}$$

Actuemos ahora con J_- sobre $|3/2,1/2\rangle_c$:

$$J_-\,|3/2,1/2\rangle_c \;=\; C(3/2,1/2)\,|3/2,-1/2\rangle_c \;=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}\,\Big[\Big(J_{1-}|1,0\rangle\Big)\,|1/2,1/2\rangle \;+\; |1,0\rangle\Big(J_{2-}|1/2,1/2\rangle\Big)\Big] \;+$$

$$+\frac{1}{\sqrt{3}}\,\Big[\Big(J_{1-}|1,1\rangle\Big)\,|1/2,-1/2\rangle \;+\; |1,1\rangle\,\Big(J_{2-}|1/2,-1/2\rangle\Big)\Big] \;=$$

$$=\sqrt{\frac{2}{3}}C(1,0)|1,-1\rangle\,|1/2,1/2\rangle \;+\; \Big(\sqrt{\frac{2}{3}}\,C(1/2,1/2) \;+\; \frac{1}{\sqrt{3}}C(1,1)\Big)|1,0\rangle\,|1/2,-1/2\rangle\;,$$

donde hemos tenido en cuenta que $J_{2-}|1/2,-1/2\rangle \;=\; 0$. En esta ultima ecuacion podemos despejar $|3/2,-1/2\rangle_c$:

$$|3/2,-1/2\rangle_c \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{C(1,0)}{C(3/2,1/2)}|1,-1\rangle\,|1/2,1/2\rangle + \frac{\sqrt{2}\,C(1/2,1/2)+C(1,1)}{\sqrt{3}C(3/2,1/2)}\,|1,0\rangle\,|1/2,-1/2\rangle\;.$$

Tengamos ahora en cuenta, ademas de los escritos mas arriba, los siguientes valores para los coeficientes C:

$$C(1,0) \;=\; \sqrt{2}\,\hbar\;, \qquad\qquad C(3/2,1/2) \;=\; 2\hbar\;.$$

Entonces:

$$\sqrt{\frac{2}{3}}\,\frac{C(1,0)}{C(3/2,1/2)} \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\;, \qquad\qquad \frac{\sqrt{2}\,C(1/2,1/2)+C(1,1)}{\sqrt{3}C(3/2,1/2)} \;=\; \sqrt{\frac{2}{3}}\;,$$

y, por consiguiente:

$$\boxed{|3/2,-1/2\rangle_c \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,-1\rangle\,|1/2,1/2\rangle \;+\; \sqrt{\frac{2}{3}}\,|1,0\rangle\,|1/2,-1/2\rangle}$$

Para encontrar el ultimo estado con $j=3/2$ apliquemos una vez mas J_-:

$$J_-\,|3/2,-1/2\rangle_c \;=\; C(3/2,-1/2)\,|3/2,-3/2\rangle_c \;=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\Big[\Big(J_{1-}|1,-1\rangle\Big)|1/2,1/2\rangle \;+\; |1,-1\rangle\Big(J_{2-}|1/2,1/2\rangle\Big)\Big] \;+$$

$$+\sqrt{\frac{2}{3}}\,\Big[\Big(J_{1-}|1,0\rangle\Big)|1/2,-1/2\rangle \;+\; |1,0\rangle\Big(J_{2-}|1/2,-1/2\rangle\Big)\Big] \;=$$

$$=\left[\frac{1}{\sqrt{3}}\,C(1/2,1/2) \;+\; \sqrt{\frac{2}{3}}\,C(1,0)\right]|1,-1\rangle\,|1/2,-1/2\rangle\;,$$

donde hemos tenido en cuenta que $J_{1-}|1,-1\rangle = J_{2-}|1/2,-1/2\rangle = 0$. Entonces:

$$|3/2,-3/2\rangle_c \;=\; \frac{C(1/2,1/2) \;+\; \sqrt{2}\,C(1,0)}{C(3/2,-1/2)}\,|1,-1\rangle\,|1/2,-1/2\rangle\;.$$

Utilizando que:

$$C(3/2,-1/2) \;=\; \sqrt{3}\,\hbar\;,$$

asi como los valores de $C(1/2,1/2)$ y $C(1,0)$ obtenidos mas arriba, podemos escribir:

$$\frac{C(1/2,1/2) \;+\; \sqrt{2}\,C(1,0)}{C(3/2,-1/2)} \;=\; 1\;.$$

Por lo tanto:

$$\boxed{|3/2,-3/2\rangle_c \;=\; |1,-1\rangle\,|1/2,-1/2\rangle}$$

Encontremos ahora los vectores del doblete con $j=1/2$. El vector de este doblete cuya tercera componente es la mas alta, con $m=1/2$, debe de ser una combinacion lineal del tipo:

$$|1/2,1/2\rangle_c \;=\; \alpha\,|1,1\rangle\,|1/2,-1/2\rangle \;+\; \beta\,|1,0\rangle\,|1/2,1/2\rangle\;.$$

Este vector $|1/2, 1/2\rangle_c$ debe de ser ortogonal al $|3/2, 1/2\rangle_c$ obtenido anteriormente. Impongamos pues que:

$$ {}_c\langle 3/2, 1/2 | 1/2, 1/2\rangle_c \,=\, 0 \;. $$

Esto sucede si:

$$ \alpha\,\frac{1}{\sqrt{3}} \,+\, \beta\,\sqrt{\frac{2}{3}} \,=\, 0 \qquad\Longrightarrow\qquad \alpha \,=\, -\sqrt{2}\,\beta \;. $$

Ademas, la condicion de normalizacion ${}_c\langle 1/2, 1/2 | 1/2, 1/2\rangle_c \,=\, 1$ implica que $\alpha^2 + \beta^2 = 1$. Entonces:

$$ 2\beta^2 + \beta^2 \,=\, 1 \qquad\Longrightarrow\qquad \beta \,=\, \pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad\Longrightarrow\qquad \alpha \,=\, \mp\sqrt{\frac{2}{3}} \;. $$

Tomemos como solucion:

$$ \alpha \,=\, \sqrt{\frac{2}{3}} \;, \qquad\qquad \beta \,=\, -\frac{1}{\sqrt{3}} \;, $$

que corresponde al siguiente vector $|1/2, 1/2\rangle_c$:

$$ \boxed{|1/2, 1/2\rangle_c \,=\, \sqrt{\frac{2}{3}}|1,1\rangle\,|1/2,-1/2\rangle \,-\, \frac{1}{\sqrt{3}}\,|1,0\rangle\,|1/2,1/2\rangle} $$

Si ahora actuamos con J_- obtendremos $|1/2, -1/2\rangle_c$:

$$ \begin{aligned} J_-\,|1/2, 1/2\rangle_c \,&=\, C(1/2,1/2)\,|1/2,-1/2\rangle_c \,= \\ &= \sqrt{\frac{2}{3}}\Big[\Big(J_{1-}|1,1\rangle\Big)|1/2,-1/2\rangle \,+\, |1,1\rangle\Big(J_{2-}|1/2,-1/2\rangle\Big)\Big] \,+ \\ &- \frac{1}{\sqrt{3}}\,\Big[\Big(J_{1-}|1,0\rangle\Big)|1/2,1/2\rangle \,+\, |1,0\rangle\,\Big(J_{2-}|1/2,1/2\rangle\Big)\Big] \,= \\ &= \frac{\sqrt{2}\,C(1,1) \,-\, C(1/2,1/2)}{\sqrt{3}}\,|1,0\rangle\,|1/2,-1/2\rangle \,-\, \frac{C(1,0)}{\sqrt{3}}\,|1,-1\rangle\,|1/2,1/2\rangle \;, \end{aligned} $$

donde hemos tenido en cuenta que $J_{2-}|1/2,-1/2\rangle = 0$. Asi pues:

$$ |1/2,-1/2\rangle_c \,=\, \frac{\sqrt{2}\,C(1,1) \,-\, C(1/2,1/2)}{\sqrt{3}\,C(1/2,1/2)}|1,0\rangle\,|1/2,-1/2\rangle - \frac{C(1,0)}{\sqrt{3}\,C(1/2,1/2)}\,|1,-1\rangle\,|1/2,1/2\rangle \;. $$

Los coeficientes que multiplican a los vectores en esta ultima expresion son:

$$ \frac{\sqrt{2}\,C(1,1) \,-\, C(1/2,1/2)}{\sqrt{3}\,C(1/2,1/2)} \,=\, \frac{1}{\sqrt{3}} \;, \qquad \frac{C(1,0)}{\sqrt{3}\,C(1/2,1/2)} \,=\, \sqrt{\frac{2}{3}} \;. $$

Entonces, finalmente obtenemos:

$$\boxed{|1/2,-1/2\rangle_c \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}|1,0\rangle\,|1/2,-1/2\rangle \;-\; \sqrt{\frac{2}{3}}|1,-1\rangle\,|1/2,1/2\rangle}$$

[11] Considerese una particula de espin 1. Supongase que la particula se encuentra en un estado con un valor bien definido de la componente y del espin e igual a $+\hbar$. ¿ Cuanto vale el valor medio de la componente x del espin en dicho estado?.

Solucion

Recordemos la representacion matricial de las componentes del espin en la base canonica de vectores $\{|1,1\rangle, |1,0\rangle, |1,-1\rangle\}$, en los que la tercera componente S_z es diagonal:

$$S_x \;=\; \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix} \quad , \quad S_y \;=\; \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix} \quad , \quad S_z \;=\; \hbar\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix} \quad .$$

Determinemos, en esta base, el autovector de S_y con autovalor $+\hbar$. Denotemos por $|1,1\rangle_y$ dicho autovector y supongamos tiene la forma:

$$|1,1\rangle_y \;=\; \begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \quad ,$$

siendo a, b y c constantes a determinar a partir de la ecuacion de autovalores, que toma la forma:

$$S_y\,|1,1\rangle_y \;=\; \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \;=\; \hbar\begin{pmatrix}a\\ b\\ c\end{pmatrix} \quad .$$

A partir de esta ecuacion se sigue que:

$$-ib \;=\; \sqrt{2}\,a \;, \qquad ia - ic \;=\; \sqrt{2}\,b \;, \qquad ib \;=\; \sqrt{2}\,c \;.$$

Estas relaciones nos permiten escribir b y c en terminos de a:

$$b = i\sqrt{2}\,a \;, \qquad\qquad c = -a \;.$$

Por lo tanto el autovector buscado es:

$$|1,1\rangle_y \;=\; a\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}\;.$$

Para determinar la constante a impongamos la condicion de normalizacion:

$${}_y\langle 1,1|1,1\rangle_y \;=\; 1 \;\Longrightarrow\; |a|^2(1+2+1)=1 \;\Longrightarrow\; a=\frac{1}{2}\;.$$

Por consiguiente, tenemos:

$$|1,1\rangle_y \;=\; \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix}$$

En notacion de Dirac, el vector $|1,1\rangle_y$ puede ponerse como la siguiente combinacion de autovectores de S_z:

$$|1,1\rangle_y \;=\; \frac{1}{2}\,|1,1\rangle \;+\; \frac{i}{\sqrt{2}}|1,0\rangle \;-\; \frac{1}{2}|1,-1\rangle\;.$$

El valor medio de S_x es:

$$\langle S_x\rangle \;=\; {}_y\langle 1,1|S_x|1,1\rangle_y$$

Puesto que:

$$S_x\,|1,1\rangle_y \;=\; \frac{\hbar}{2\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ i\sqrt{2}\\ -1\end{pmatrix} \;=\; \frac{\hbar}{2}\begin{pmatrix}i\\0\\i\end{pmatrix}$$

y:

$${}_y\langle 1,1| \;=\; \frac{1}{2}\,(1\,,\,-\sqrt{2}\,i\,,\,-1)\;,$$

se tiene:

$$\langle S_x\rangle \;=\; \frac{\hbar}{4}\,(1\,,\,-\sqrt{2}\,i\,,\,-1)\begin{pmatrix}i\\0\\i\end{pmatrix}\;.$$

Por lo tanto, finalmente:

$$\boxed{\langle S_x\rangle \;=\; 0}$$

[12] Un sistema esta constituido por dos particulas 1 y 2. La particula 1 tiene espin 1/2, mientras que la particula 2 tiene espin 3/2. El hamiltoniano del sistema es:

$$H \;=\; \alpha\,\vec{S}^{\,2} \;+\; \beta\big(\vec{S}_1^{\,2} \;+\; \vec{S}_2^{\,2}\big)\;,$$

siendo α y β constantes. $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ son los operadores de espin de las particulas 1 y 2 respectivamente y $\vec{S} \;=\; \vec{S}_1+\vec{S}_2$. Obtenganse los niveles de energia del sistema y su degeneracion.

Solucion

Al acoplar $\vec{S}_1$ y $\vec{S}_2$ resulta:

$$\frac{1}{2} \otimes \frac{3}{2} \,=\, 1 \oplus 2 \;.$$

Asi pues, el numero cuantico del espin total $\vec{S} \,=\, \vec{S}_1 + \vec{S}_2$ es $s = 1, 2$. Dado que:

$$\vec{S}_1^2 \,=\, \hbar^2 \,\frac{1}{2}\big(\frac{1}{2} + 1\big) \,=\, \frac{3\hbar^2}{4} \;, \qquad\qquad \vec{S}_2^2 \,=\, \hbar^2 \,\frac{3}{2}\big(\frac{3}{2} + 1\big) \,=\, \frac{15\hbar^2}{4} \;,$$

se tiene

$$\vec{S}_1^2 \,+\, \vec{S}_2^2 \,=\, \frac{18}{4}\,\hbar^2 \,=\, \frac{9}{2}\,\hbar^2 \;.$$

Por consiguiente, el hamiltoniano H es:

$$H \,=\, \alpha\, \vec{S}^{\,2} \,+\, \frac{9}{2}\,\hbar^2 \;.$$

Asi, dado un numero cuantico de espin total s, existen $2s + 1$ estados con energia:

$$\boxed{E_s \,=\, \alpha\, \hbar^2\, s(s+1) \,+\, \frac{9}{2}\,\hbar^2}$$

En particular, como s puede tomar los valores 1 y 2, tenemos el siguiente espectro:

$$\boxed{s \,=\, 1} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{E_1 \,=\, \Big(2\alpha \,+\, \frac{9\beta}{2}\Big)\,\hbar^2} \qquad (3 \text{ estados})$$

$$\boxed{s \,=\, 2} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{E_2 \,=\, \Big(6\alpha \,+\, \frac{9\beta}{2}\Big)\,\hbar^2} \qquad (5 \text{ estados})$$

[13] Considerese un sistema cuyo momento angular orbital $\vec{L} = (L_x, L_y, L_z)$ tiene numero cuantico l y cuyo hamiltoniano es:

$$H \,=\, \frac{\omega}{\hbar}\,\Big(L_x^2 + L_y^2\Big) \;,$$

donde ω es una constante. Obtenganse los niveles de energia del sistema y su degeneracion.

Solucion

Sea $L^2 \,=\, L_x^2 + L_y^2 + L_z^2$. Entonces:

$$L_x^2 + L_y^2 \,=\, L^2 \,-\, L_z^2 \;.$$

Por consiguiente el hamiltoniano del sistema puede escribirse como:

$$H = \frac{\omega}{\hbar} \left(L^2 - L_z^2 \right) .$$

Sabemos que los autovectores comunes a L^2 y L_z satisfacen:

$$L^2 \, |l, m\rangle = l(l+1)\hbar^2 \, |l, m\rangle , \qquad\qquad L_z \, |l, m\rangle = m\hbar \, |l, m\rangle ,$$

para $l = 0, 1, \cdots$ y $m = -l, \cdots, +l$. Se sigue que los estados $|l, m\rangle$ tambien diagonalizan el hamiltoniano:

$$H \, , |l, m\rangle = \frac{\omega}{\hbar} \left(l(l+1) - m^2 \right) \hbar^2 \, |l, m\rangle , = E_{l,m} \, |l, m\rangle ,$$

donde l es un entero no negativo y los niveles de energia son:

$$E_{l,m} = \hbar\omega \left(l(l+1) - m^2 \right) , \qquad\qquad m = -l, \cdots, 0, \cdots + l .$$

Observese que, para todo l:

$$m \neq 0 \;\rightarrow\; \text{estado doblemente degenerado} ,$$

$$m = 0 \;\rightarrow\; \text{estado no degenerado} .$$

La energia del estado no degenerado es:

$$E_0 \equiv E_{l,0} = l(l+1)\hbar .$$

Este es el estado de energia mas alta para un l dado. Por otra parte los estados degenerados tienen por energia $E_{l,\pm m}$ para $m \neq 0$. Estos estados tienen menor energia que el estado $|l, 0\rangle$. El estado fundamental es doblemente degenerado y su energia es:

$$E_{\pm l} \equiv E_{l,\pm l} = l\hbar\omega .$$

[14] Una particula de espin 1 se encuentra en un estado con un valor bien definido de la componente z del espin e igual a $+\hbar$. Supongase que en este estado se mide el espin en una direccion del plano xz formando un angulo θ con el eje z. ¿Que valores podemos obtener en esta medida y con que probabilidades?.

Solucion

Definamos el vector unitario $\vec{n}$ como:

$$\vec{n} \;=\; (\operatorname{sen}\theta\,,\,0\,,\,\cos\theta)\ ,$$

y el operador S_n como:

$$S_n \;=\; S_z\cos\theta + S_x\operatorname{sen}\theta\ .$$

En forma matricial

$$S_n \;=\; \hbar\begin{pmatrix}\cos\theta & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -\cos\theta\end{pmatrix} + \frac{\hbar}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0 & \operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & 0 & \operatorname{sen}\theta\\ 0 & \operatorname{sen}\theta & 0\end{pmatrix}\ ,$$

o, equivalentemente:

$$S_n \;=\; \hbar\begin{pmatrix}\cos\theta & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & -\cos\theta\end{pmatrix}\ .$$

Necesitamos encontrar los autovalores y autovectores de S_n. Para ello tenemos que resolver la ecuacion secular:

$$\det(S_n - \lambda\hbar) \;=\; \begin{vmatrix}\cos\theta-\lambda & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & 0\\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & -\lambda & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}}\\ 0 & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & -\cos\theta-\lambda\end{vmatrix} \;=\; 0\ .$$

Calculando el determinante, obtenemos:

$$\det(S_n-\lambda\hbar) \;=\; \hbar^3\left[\lambda(\cos\theta-\lambda)\left[\lambda(\cos\theta+\lambda) - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}\right] + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}(\cos\theta+\lambda)\right] =$$

$$=\;\hbar^3\left[\lambda(\cos^2\theta-\lambda^2) - \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}(\cos\theta-\lambda) + \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2}(\cos\theta+\lambda)\right] =$$

$$=\;\hbar^3\left[\lambda\,\cos^2\theta - \lambda^3 + \lambda\operatorname{sen}^2\theta\right]\ .$$

Despues de simplificar la ecuacion secular se convierte en:

$$\det(S_n-\lambda\hbar) \;=\; \hbar^3\lambda(1-\lambda^2) \;=\; 0\ ,$$

cuyas soluciones son:

$$\lambda \;=\; 0\ ,\qquad\qquad \lambda \;=\; \pm 1\ .$$

Estudiemos ahora los diferentes autovectores. Pongamos:

$$|1,m\rangle_n \;=\; \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;, \qquad\qquad S_n\,|1,m\rangle_n \;=\; m\hbar\,|1,m\rangle_n \;, \qquad\qquad m = 1, 0, -1 \;.$$

La ecuacion de autovectores corresponde a la siguiente ecuacion matricial:

$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & 0 \\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} & -\cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;=\; \begin{pmatrix} a\cos\theta + \frac{b\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{a\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} + \frac{c\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \\ \frac{b\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} - c\cos\theta \end{pmatrix} \;=\; m \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \;.$$

Tenemos pues el siguiente sistema redundante de ecuaciones lineales:

$$a\cos\theta + \frac{b\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \;=\; m\,a \;,$$

$$\frac{a\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} + \frac{c\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \;=\; m\,b \;,$$

$$\frac{b\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} - c\cos\theta \;=\; m\,c \;.$$

A partir de la tercera ecuacion del sistema obtenemos:

$$b \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta}\,(m + \cos\theta)\,c \;.$$

Substituyendo este resultado en la primera ecuacion del sistema, llegamos a:

$$a\cos\theta + (m + \cos\theta)\,c \;=\; a\,m \;\;\Longrightarrow\;\; (m + \cos\theta)\,c \;=\; (m - \cos\theta)\,a \;.$$

Para resolver esta ecuacion pongamos:

$$c \;=\; A\,(m - \cos\theta) \;, \qquad\qquad a \;=\; A\,(m + \cos\theta) \;,$$

siendo A una constante a determinar. Entonces:

$$b \;=\; \frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta}\,(m + \cos\theta)\,A\,(m - \cos\theta) \;=\; A\,\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta}\,(m^2 \;-\; \cos^2\theta) \;.$$

Tomemos primero $m = \pm 1$. Entonces $b \;=\; A\,\sqrt{2}\operatorname{sen}\theta$ y el vector $|1,m\rangle$ es:

$$|1,m\rangle_n \;=\; A\,\begin{pmatrix} m + \cos\theta \\ \sqrt{2}\,\operatorname{sen}\theta \\ m - \cos\theta \end{pmatrix} \;, \qquad\qquad m \;=\; \pm 1 \;.$$

La constante A se determina imponiendo la condicion de normalizacion. Puesto que:

$$ {}_n\langle 1, m | 1, m \rangle_n \;=\; A^2 \left[(m + \cos\theta)^2 + 2 \operatorname{sen}^2\theta + (m - \cos\theta)^2 \right] \;=\; 4\, A^2 \ , $$

entonces:

$$ A \;=\; \pm \frac{1}{2} \ . $$

Escojamos $A = +\frac{1}{2}$ para $m = +1$ y $A = -\frac{1}{2}$ para $m = +1$. Con esta convencion, los estados $|1,1\rangle_n$ y $|1,-1\rangle_n$ son:

$$ |1,1\rangle_n \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1+\cos\theta}{2} \\ \\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1-\cos\theta}{2} \end{pmatrix} \ , \qquad\qquad |1,-1\rangle_n \;=\; \begin{pmatrix} \frac{1-\cos\theta}{2} \\ \\ -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \\ \\ \frac{1+\cos\theta}{2} \end{pmatrix} \ . $$

Consideremos ahora el caso $m = 0$. Las componentes a, b y c del vector $|1,0\rangle_n$ son:

$$ a \;=\; A\,\cos\theta \ , \qquad b \;=\; -A\,\frac{\sqrt{2}}{\operatorname{sen}\theta}\,\cos^2\theta \ , \qquad c \;=\; -A\cos\theta \ . $$

Para determinar la constante A imponemos, tambien en este caso, la condicion de normalizacion:

$$ a^2 + b^2 + c^2 \;=\; 2\,A^2\,\frac{\cos^2\theta}{\operatorname{sen}^2\theta} \;=\; 1 \ , $$

que se resuelve si:

$$ A\,\cos\theta \;=\; -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \ . \tag{0.1} $$

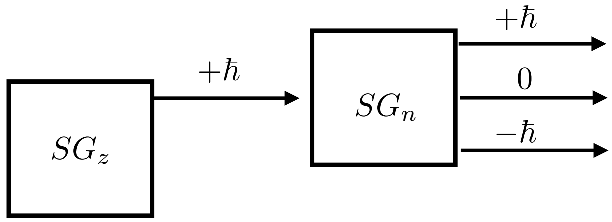
Usando este valor de A obtenemos las componentes a, b y c del vector $|1,0\rangle_n$:

$$ a \;=\; -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \ , \qquad b \;=\; \cos\theta \ , \qquad c \;=\; \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \ . $$

Por lo tanto:

$$ |1,0\rangle_n \;=\; \begin{pmatrix} -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \\ \\ \cos\theta \\ \\ \frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \ . $$

Este problema es equivalente la siguiente configuracion de detectores de Stern-Gerlach:



El estado que sale del primer detector SG_z es $|1,1\rangle$, que puede obtenerse poniendo $\theta = 0$ en la expresion de $|1,1\rangle_n$, y esta dado por:

$$|1,1\rangle \;=\; \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \;.$$

Para obtener las probabilidades pedidas debemos de expresar $|1,1\rangle$ en terminos de $|1,1\rangle_n$, $|1,0\rangle_n$ y $|1,-1\rangle_n$:

$$|1,1\rangle \;=\; c_1\,|1,1\rangle_n \;+\; c_0\,|1,0\rangle_n \;+\; c_{-1}\,|1,-1\rangle_n \;.$$

Los coeficientes en esta combinacion lineal son:

$$c_1 \;=\; {}_n\langle 1,1|1,1\rangle \;=\; \frac{1+\cos\theta}{2} \;,$$

$$c_0 \;=\; {}_n\langle 1,0|1,1\rangle \;=\; -\frac{\operatorname{sen}\theta}{\sqrt{2}} \;.$$

$$c_{-1} \;=\; {}_n\langle 1,-1|1,1\rangle \;=\; \frac{1-\cos\theta}{2} \;.$$

Las probabilidades pedidas son las de los tres posibles estados a la salida del segundo detector, y son:

$$P_{+1} \;=\; |c_1|^2 \;=\; \frac{(1+\cos\theta)^2}{4} \;,$$

$$P_0 \;=\; |c_0|^2 \;=\; \frac{\operatorname{sen}^2\theta}{2} \;,$$

$$P_{-1} \;=\; |c_{-1}|^2 \;=\; \frac{(1-\cos\theta)^2}{4} \;.$$

Como comprobacion, puede verificarse facilmente que $P_{+1} + P_0 + P_{-1} \;=\; 1$.